Title	ボゾンフェルミオン対応の基礎と線形代数のみから双対GROTHENDIECK多項式の行列式表示を導く (可積分系数理の現状と展望)
Author(s)	岩尾, 慎介
Citation	数理解析研究所講究録 = RIMS Kokyuroku (2018), 2071: 125-133
Issue Date	2018-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/242003
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第2071巻 2018年 125-133

ボゾンフェルミオン対応の基礎と線形代数のみから双対 GROTHENDIECK 多項式の行列式表示を導く

青山学院大学・理工学部　岩尾慎介
SHINSUKE IWAO
COLLEGE OF SCIENCE AND ENGINEERING,
AOYAMAGAKUIN UNIVERSITY

ABSTRACT. Grothendieck 多項式とは，旗多様体の量子 K 理論を表現する際に現れる対称多項式であり，Schubert 多項式の K 理論版ということができる．Schubert 多項式同様，Grothendieck 多項式は対称群の元によりパラメータ付けされている．特に Grassmannian 置換に対応する Grothendieck 多項式は，Schur 多項式の K 理論版といえる．ここでは，Grassmann 置換に対応する Grothendieck 多項式のみを扱う．本稿では，ボゾンフェルミオン対応を用いて， Grothendieck 多項式と双対 Grothendieck 多項式の特徴づけを与える．応用として，双対 Grothendieck 多項式の行列式表示を与える．

1. INTRODUCTION

Grothendieck 多項式は， 旗多様体の K 理論において，Schubert 多様体の構造層を表現する対称多項式として導入されたものである [8, 10]. 標語的には，Grothendieck 多項式は Schubert 多項式の K 理論版ということができる．特に，Grasmann 置換に対応する Schubert 多様体に対応する Grothendieck 多項式は，Young 図形 λ によってパラメータ付けされる [11]. この Grothendieck 多項式 G_λ は，Schur 多項式 s_λ の K 理論版である．

$\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_l)$ を Young 図形とする．Schur 多項式 s_λ と同様, Grothendieck 多項式 $G_\lambda(x_1,\dots,x_l)$ も種々の行列式表示を持つことが知られている (cf. [3, 14, 17]). 例えば Jacobi-Trudi 型の公式は以下で与えられる [5, 11, 17]:

$$G_\lambda(x_1,\dots,x_l)=\det\left(\textstyle\sum_i \beta^i\binom{p-1}{i}h_{\lambda_p+q-p-i}(x_1,\dots,x_l)\right)_{1\le p,q\le l}. \tag{1}$$

ここで $h_p(x_1,\dots,x_l)$ は p 次完全対称多項式，β はパラメータである．$\beta\to 0$ の特殊化で, $G_\lambda(x_1,\dots,x_l)$ が $s_\lambda(x_1,\dots,x_l)$ に一致することはすぐに見て取れるであろう．(本稿の G_λ は，一般には β-Grothendieck 多項式と呼ばれるものである．「普通の」Grothendieck 多項式は，$\beta\to -1$ の特殊化で得られる．煩雑さを避けるため，ここでは “β-” という冠言葉はすべて落とすことにする.)

$\Lambda=\mathbb{C}[h_1,h_2,\dots]=\mathbb{C}[e_1,e_2,\dots]=\mathbb{C}[p_1,p_2,\dots]$ を，$\mathbb{C}$ 係数対称関数 (= 無限変数の対称多項式) の環とする [12]. 対称関数 $G^l_\lambda=G^l_\lambda(x_1,x_2,\dots)\in\Lambda$ を，行列式 (1) に現れる $h_p(x_1,\dots,x_l)$ を全て $h_p=h_p(x_1,x_2,\dots)$ に置き換えたものとして定める．注意すべきは，対称関数の列 $G^l_\lambda,G^{l+1}_\lambda,G^{l+2}_\lambda,\dots\in\Lambda$ が，いつまで経っても一定にならないことである．(Schur 関数では起こらなかったことである.) これは，無限変数の Grothendieck 多項式 $G_\lambda=G_\lambda(x_1,x_2,\dots)$ が，Λ の中には存在しないことを意味する．しかしこの問題は, 適当な完備化 $\hat{\Lambda}\supset\Lambda$ を取ることで解決される ([6] を参照. §2.3 も見よ).

Date: March 31, 2017.

双対 Grothendieck 多項式 $\{g_\lambda\}_\lambda$ は，Hall 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する $\{G_\lambda\}_\lambda$ の双対基底として定まる対称多項式である：$\langle G_\lambda, g_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu}$. 双対 Grothendieck 多項式は Buch [1] によって導入され，その Jacobi-Trudi 型公式は Shimozono と Zabrocki [16] によって証明されている（ただし未出版）．この公式の別証明は Lascoux と Naruse [9] によっても与えられた．

このように旗多様体の量子 K 理論から生まれた Grothendick 多項式だが，実は別の文脈でも現れることが明らかになってきた．2013 年，Motegi と Sakai [14, 15] は，ある種の可積分系 (TASEP，five-vertex model など) の波動関数をフェルミオンの言葉で書き下すときに，(歪) Grothendieck 多項式が自然に現れることを発見した．彼らの言葉を借りれば，Grothendieck 多項式は（Schur 多項式のように），数学の様々な分野で顔を出す「遍在性 (ubiquity)」を持つ存在であるといえる．

本稿では，具体的な可積分系を離れ，ボゾンフェルミオン対応 [4, 13] の素朴な性質のみから，Grothendieck 多項式とその双対の特徴づけを与えることができることを紹介する．系として，双対 Grothendieck 多項式の行列式公式の別証明を与える．この結果は前出の [9, 16] の結果を何ら超えるものではないが，ボゾンフェルミオン対応と線形代数のごく基本的な知識のみで理解できるものであるから，アクセスしやすさという点では優れていると言えるだろう[1].

Acknowledgments. この研究は，科研費 (26800062) の補助を受けている．

2. Boson-Fermion correspondence

2.1. **Definitions.** まずボゾンフェルミオン対応の基礎的な事実を証明抜きで紹介しよう．詳細は，例えば教科書 [4, 13] を参照.

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{i_0 < i_1 < \cdots} \mathbb{C} v_{i_0} \wedge v_{i_1} \wedge \cdots , \qquad i_k = k, \quad (k \gg 0)$$

をフェルミオン **Fock 空間**とする．この空間には **Heisenberg 代数**

$$H = \mathbb{C}[a_n \,|\, n = \pm 1, \pm 2, \dots], \qquad [a_m, a_n] = m\delta_{m+n,0} \quad (m > n)$$

が以下のように作用する：

$$a_m(v_{i_0} \wedge v_{i_1} \wedge \cdots) = \sum_{j=0}^{\infty} v_{i_0} \wedge \cdots \wedge v_{i_{j-1}} \wedge v_{i_j+m} \wedge v_{i_{j+1}} \wedge \cdots .$$

元 $V_0 := v_0 \wedge v_1 \wedge \cdots$ は普通，**真空ベクトル**と呼ばれる.

Λ を，無限変数 $x = (x_1, x_2, \dots)$ を持つ $\mathbb{C}$ 係数対称関数のなす環とする [12]. このとき，**ボゾンフェルミオン対応**と呼ばれる $\mathbb{C}$ ベクトル空間の同型 $\phi : \mathcal{F} \to \Lambda$ が存在して，以下の性質を満たすことが知られている.

$$\phi(V_0) = 1, \quad \phi(a_{-i}v) = p_i \phi(v), \quad \phi(a_i v) = p_i^{\perp} \phi(v).$$

ここで，$f^{\perp} : \Lambda \to \Lambda$ $(f \in \Lambda)$ は，$\langle f^{\perp} g, h \rangle = \langle g, fh \rangle$ $(\forall h \in \Lambda)$ にて定義される adjoint 作用 [12] である.

Proposition 2.1. ([4, Theorem 6.1]). 次の (i)–(iii) が成り立つ.

[1] 本稿の内容は，もともと池田岳氏（岡山理科大学）と前野俊昭氏（名城大学）との共著論文 [2] において，とある補題を証明するために考えていたものであったが，その補題は別の組み合わせ論的方法で解かれてしまった．捨ててしまうにはもったいない内容なので，この場を借りて発表したいと思う.

(i) $p_n(x)$ を，$x=(x_1,x_2,\dots)$ を変数に持つ n 次のベキ和 (*power sum*) とする．また，$v\in\mathcal{F}$ とする．このとき，$\exp\left(\sum_{n\geq 1}p_n(x)\frac{a_n}{n}\right)v$ は以下のように展開される

$$\exp\left(\sum_{n\geq 1}p_n(x)\frac{a_n}{n}\right)v=\phi(v)\cdot V_0+(\textit{non-vacuum terms}).$$

(ii) $F=\sum_{j=1}^{\infty}c_ia_i$（有限個を除いて $c_i=0$）とする．$e^F\cdot v_i=A_i^iv_i+A_i^{i+1}v_{i+1}+A_i^{i+2}v_{i+2}+\cdots$ により A_j^i を定めるとき，

$$e^F\cdot(v_{i_0}\wedge v_{i_1}\wedge\cdots)=\sum_{j_0<j_1<\cdots}\det(A_{i_0,i_1,\dots}^{j_0,j_1,\dots})\cdot v_{j_0}\wedge v_{j_1}\wedge\cdots$$

が成り立つ．ただし，$A_{i_0,i_1,\dots}^{j_0,j_1,\dots}$ はその (p,q) 成分が $A_{i_{p-1}}^{j_{q-1}}$ であるような行列である．

(iii) $\lambda=(-i_0,1-i_1,2-i_2,\dots)$ を *Young* 図形，s_λ を *Schur* 関数とするとき，等式 $\phi(v_{i_0}\wedge v_{i_1}\wedge\cdots)=s_\lambda$ が成り立つ．

2.2. **Symmetric polynomial G_λ^l.** $\mathfrak{v}:=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}v_i$ とおく．$\mathfrak{v}$ の元 $V\begin{pmatrix}\psi\\ b\end{pmatrix}$ $(\psi\geq 0, b\in\mathbb{Z})$ を

$$V\begin{pmatrix}0\\ b\end{pmatrix}=v_b,\qquad V\begin{pmatrix}\psi+1\\ b\end{pmatrix}=V\begin{pmatrix}\psi\\ b\end{pmatrix}+\beta\cdot V\begin{pmatrix}\psi\\ b-1\end{pmatrix}$$

にて定める．以下の公式によって定めると言っても同じである．

$$V\begin{pmatrix}\psi\\ b\end{pmatrix}=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\beta^{b-i}\binom{\psi}{b-i}v_i. \tag{2}$$

Young 図形 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_l)$ に対して，対称関数

$$Q_\lambda^l:=\phi\left(V\begin{pmatrix}0\\ -\lambda_1\end{pmatrix}\wedge V\begin{pmatrix}1\\ 1-\lambda_2\end{pmatrix}\wedge\cdots\wedge V\begin{pmatrix}l-1\\ l-1-\lambda_l\end{pmatrix}\wedge v_l\wedge v_{l+1}\wedge\cdots\right)$$

を考える．

Proposition 2.2. Q_λ^l は §1 の G_λ^l と一致する．

Proof. $V_\lambda:=V\begin{pmatrix}0\\ -\lambda_1\end{pmatrix}\wedge V\begin{pmatrix}1\\ 1-\lambda_2\end{pmatrix}\wedge\cdots\wedge V\begin{pmatrix}l-1\\ l-1-\lambda_l\end{pmatrix}\wedge v_l\wedge v_{l+1}\wedge\cdots$ と書こう．また，$F:=\exp\left(\sum_{n\geq 1}p_n(x)\frac{a_n}{n}\right)$ とする．(2) より，

$$\begin{aligned}e^F\cdot V\begin{pmatrix}\psi\\ b\end{pmatrix}&=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\beta^{b-i}\binom{\psi}{b-i}\exp\left(\sum_{n\geq 1}p_n(x)\frac{a_n}{n}\right)v_i\\ &=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\beta^{b-i}\binom{\psi}{b-i}\sum_{n\geq 0}h_n(x)v_{n+i}\end{aligned}$$

が成り立つ．$e^F\cdot V\begin{pmatrix}p-1\\ p-1-\lambda_p\end{pmatrix}=\sum_q A_p^qv_q$ と展開したとき，係数は

$$A_p^q=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\beta^{(p-1)-(\lambda_p+i)}\binom{p-1}{\lambda_p+i}h_{q-i}(x)=\sum_i\beta^i\binom{p-1}{i}h_{\lambda_p+q+1-p+i}(x)$$

で与えられる．Proposition 2.1 (ii) より，

$$e^F \cdot V_\lambda = \det(A^{0,1,\ldots,l-1}_{1,2,\ldots,l})V_0 + (\text{non-vacuum terms})$$

が成り立つ．これは $\phi(V_\lambda) = \det(A^{0,1,\ldots,l-1}_{1,2,\ldots,l})$ を意味する (Proposition 2.1 (i))．これは，(1) で示した G^l_λ の Jacobi-Trudi 型公式に他ならない． □

2.3. **Grothendieck polynomials in infinitely many variables.** 実は，対称関数の列 $G^l_\lambda, G^{l+1}_\lambda, G^{l+2}_\lambda, \ldots$ はいつまで経っても一定にならないことが知られている．これは，無限変数の Grothendieck 多項式が Λ の中に存在しないことを意味する．しかし，ある標準的な手続きで Λ の完備化 $\hat{\Lambda}$ を定義することができ，その中では極限 "$\lim_{l\to\infty} G^l_\lambda$" が存在するようにできる．詳細は [6] などを参照．この極限を G_λ を書くことにする．具体的には，$G_\lambda \in \hat{\Lambda}$ は Schur 関数の無限級数として表現される．

フェルミオンフォック空間 $\mathcal{F}$ の方も適当に完備化することで，同型 $\phi : \mathcal{F} \to \Lambda$ の完備化 $\widehat{\phi} : \widehat{\mathcal{F}} \to \hat{\Lambda}$ を定めることができる．$\widehat{\mathcal{F}}$ は，

$$V\begin{pmatrix}0\\b_1\end{pmatrix} \wedge \cdots \wedge V\begin{pmatrix}l-1\\b_l\end{pmatrix} \wedge V\begin{pmatrix}l\\l\end{pmatrix} \wedge V\begin{pmatrix}l+1\\l+1\end{pmatrix} \wedge \cdots$$

の形をした元たちから生成される $\mathbb{C}$ ベクトル空間である．

Proposition 2.3. $\widehat{\Lambda}$ 上の等式として

$$\begin{aligned} G_\lambda &= \lim_{l\to\infty} G^l_\lambda \\ &= \widehat{\phi}\Bigg(V\begin{pmatrix}0\\-\lambda_1\end{pmatrix} \wedge V\begin{pmatrix}1\\1-\lambda_2\end{pmatrix} \wedge \cdots \wedge V\begin{pmatrix}l-1\\l-1-\lambda_l\end{pmatrix} \\ &\qquad\qquad \wedge V\begin{pmatrix}l\\l\end{pmatrix} \wedge V\begin{pmatrix}l+1\\l+1\end{pmatrix} \wedge \cdots\Bigg) \end{aligned}$$

が成り立つ．

3. 双対 Grothendieck 多項式

3.1. **Definition of g_λ.** 元 $v\begin{pmatrix}\theta\\a\end{pmatrix}$ $(\theta \geq 0, a \in \mathbb{Z})$ を

$$v\begin{pmatrix}\theta\\a\end{pmatrix} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \beta^{i-a}\begin{pmatrix}-\theta\\i-a\end{pmatrix} v_i \tag{3}$$

にて定める．この和は真に無限和で，このままでは意味を持たない．しかし，次のように書かれる元

$$v\begin{pmatrix}\theta_1\\a_1\end{pmatrix} \wedge \cdots \wedge v\begin{pmatrix}\theta_l\\a_l\end{pmatrix} \wedge v_l \wedge v_{l+1} \wedge \cdots \tag{4}$$

は，適当な解釈のもと，誤解なく $\mathcal{F}$ の元を一つ定める[2]．

[2]正確には，適当な普遍性を満たす元として定義されるが，ここでは述べない．

Example 3.1. 例えば,

$$\begin{aligned}
&v\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\wedge v\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\wedge v_2\wedge v_3\wedge\cdots\\
&=(v_0-\beta v_1+\beta^2 v_2-\cdots)\wedge(v_0-3\beta v_1+6\beta^2 v_2-\cdots)\wedge v_2\wedge v_3\wedge\cdots\\
&=(v_0-\beta v_1)\wedge(v_0-3\beta v_1)\wedge v_2\wedge v_3\wedge\cdots\\
&=-2\beta\cdot v_0\wedge v_1\wedge v_2\wedge\cdots=-2\beta V_0.
\end{aligned}$$

Lemma 3.2. 次の等式が成り立つ.

$$v\begin{pmatrix}\theta_1\\a_1\end{pmatrix}\wedge\cdots\wedge v\begin{pmatrix}\theta_l\\a_l\end{pmatrix}\wedge v_l\wedge v_{l+1}\wedge\cdots=v\begin{pmatrix}\theta_1\\a_1\end{pmatrix}\wedge\cdots\wedge v\begin{pmatrix}\theta_l\\a_l\end{pmatrix}\wedge v\begin{pmatrix}l\\l\end{pmatrix}\wedge v_{l+1}\wedge\cdots.$$

Proof. 以下の計算から従う.

$$v\begin{pmatrix}l\\l\end{pmatrix}\wedge v_{l+1}\wedge v_{l+2}\wedge\cdots=(v_l-l\beta v_{l+1}+\cdots)\wedge v_{l+1}\wedge v_{l+2}\wedge\cdots=v_l\wedge v_{l+1}\wedge v_{l+2}\wedge\cdots.$$

□

Young 図形 λ に対して, 対称多項式 g_λ を

$$(5)\quad g_\lambda:=\phi\left(v\begin{pmatrix}0\\-\lambda_1\end{pmatrix}\wedge v\begin{pmatrix}1\\1-\lambda_2\end{pmatrix}\wedge\cdots\wedge v\begin{pmatrix}l-1\\l-1-\lambda_l\end{pmatrix}\wedge v_l\wedge v_{l+1}\wedge\cdots\right)$$

(ただし $l(\lambda)\le l$) にて定める. Lemma 3.2 より, この定義は l の選び方によらない.

3.2. **Schur expansion.** 対称関数 G_λ, g_λ の Schur 関数による展開 (Schur 展開) を考えよう. (2) より,

$$\begin{aligned}
(6)\quad &V\begin{pmatrix}0\\b_1\end{pmatrix}\wedge V\begin{pmatrix}1\\b_2\end{pmatrix}\wedge\cdots\wedge V\begin{pmatrix}l-1\\b_l\end{pmatrix}\wedge v_l\wedge v_{l+1}\cdots\\
&=\sum_{i_1,\dots,i_l}\prod_{p=1}^{l}\beta^{b_p-i_p}\begin{pmatrix}p-1\\b_p-i_p\end{pmatrix}v_{i_1}\wedge\cdots\wedge v_{i_l}\wedge v_l\wedge v_{l+1}\cdots\\
&=\sum_{i_1<\cdots<i_l}\beta^{b_1+\cdots+b_l-i_1-\cdots-i_l}\det(L^{i_1,\dots,i_l}_{b_1,\dots,b_l})v_{i_1}\wedge\cdots\wedge v_{i_l}\wedge v_l\wedge v_{l+1}\cdots
\end{aligned}$$

($L^{i_1,\dots,i_l}_{b_1,\dots,b_l}$ は, (p,q) 成分が $\binom{p-1}{b_p-i_q}$ であるような $l\times l$ 行列) が成り立つ.

Proposition 3.3 (G^l_λ と G_λ の Schur 展開). 以下の等式が成り立つ.

(i) $l(\lambda)\le l$ のとき,

$$G^l_\lambda=\sum_{\mu\,:\,l(\mu)\le l}\beta^{|\lambda|-|\mu|}\det(B^\mu_\lambda)s_\mu$$

(B^μ_λ は, (p,q) 成分が $\binom{p-1}{(p-\lambda_p)-(q-\mu_q)}$ であるような $l\times l$ 行列).

(ii)

$$G_\lambda=\sum_\mu\beta^{|\lambda|-|\mu|}\det(\widetilde{B}^\mu_\lambda)s_\mu$$

($\widetilde{B}^\mu_\lambda$ は, (p,q) 成分が $\binom{p-1}{(p-\lambda_p)-(q-\mu_q)}$ であるような $\infty\times\infty$ 行列).

Proof. (i) は，(6) に $b_p = p-1-\lambda_p$ と $i_q = q-1-\mu_q$ を代入し，Proposition 2.1 (iii) を用いることで得られる．(ii) は，極限 $l \to \infty$ を取ることで得られる．$\widetilde{B}^{\mu}_{\lambda}$ が

$$\widetilde{B}^{\mu}_{\lambda} = \left(\begin{array}{c|cccc} B^{\mu}_{\lambda} & & O & & \\ \hline & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ & * & 1 & 0 & \cdots \\ * & * & * & 1 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right)$$

なる形をしていることから，この極限は意味を持つ． □

同様に，

$$(7) \quad v\begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \end{pmatrix} \wedge v\begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \end{pmatrix} \wedge \cdots \wedge v\begin{pmatrix} l-1 \\ a_l \end{pmatrix} \wedge v_l \wedge v_{l+1} \cdots$$
$$= \sum_{i_1,\ldots,i_l} \prod_{p=1}^{l} \beta^{i_p - a_p} \begin{pmatrix} 1-p \\ i_p - a_p \end{pmatrix} v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_l} \wedge v_l \wedge v_{l+1} \cdots$$
$$= \sum_{i_1 < \cdots < i_l} \beta^{i_1 + \cdots + i_l - a_1 - \cdots - a_l} \det(K^{i_1,\ldots,i_l}_{a_1,\ldots,a_l}) v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_l} \wedge v_l \wedge v_{l+1} \cdots$$

($K^{i_1,\ldots,i_l}_{a_1,\ldots,a_l}$ は，(p,q) 成分が $\binom{1-p}{i_q-a_p}$ であるような $l \times l$ 行列）も成り立つ．

Proposition 3.4.
$l(\lambda) \leq l$ のとき，

$$g_\lambda = \sum_{\mu : l(\mu) \leq l} \beta^{|\mu|-|\lambda|} \det(A^{\mu}_{\lambda}) s_\mu$$

(A^{μ}_{λ} は，(p,q) 成分が $\binom{1-p}{(q-\mu_q)-(p-\lambda_p)}$ であるような $l \times l$ 行列）が成り立つ．

Proof. これは，(7) に $a_p = p-1-\lambda_p$ と $i_q = q-1-\mu_q$ を代入することにより得られる． □

3.3. **Proof of the Duality.** $\langle \cdot,\cdot \rangle : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{C}$ を Hall 内積 $\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu}$ とする．Hall 内積は，双線形形式 $\langle \cdot,\cdot \rangle : \hat{\Lambda} \times \Lambda \to \mathbb{C}$ に自然に拡張することが知られている．

一対一対応 $\iota : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \{1, 2, \ldots\}$ を一つ固定する．この章では，「x を行列 A の $(\iota(i,j),k)$ 成分とする」と言うところを，単に「x を行列 A の $((i,j),k)$ 成分とする」と言うことにする．

$\mathcal{K}$ を，$((\alpha,\beta),\gamma)$ 成分が $\binom{1-\alpha}{\gamma-\beta}$ であるような行列，$\mathcal{L}$ を，$(a,(b,c))$ 成分が $\binom{b-1}{c-a}$ であるような行列とする．このとき，積 $\mathcal{K} \cdot \mathcal{L}$ の $((\alpha,\beta),(b,c))$ 成分は

$$(8) \qquad \sum_i \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ i-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b-1 \\ c-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-\alpha \\ c-\beta \end{pmatrix}$$

と等しい．$C^{b_1,\ldots,b_l}_{a_1,\ldots,a_l}$ を，行列 $\mathcal{K} \cdot \mathcal{L}$ から第 $(1,a_1),\ldots,(l,a_l)$ 行，第 $(1,b_1),\ldots,(l,b_l)$ 列を抜き出して得られる小行列とする．式 (8) より，

$$\det(C^{b_1,\ldots,b_l}_{a_1,\ldots,a_l}) = \det\left(\begin{pmatrix} p-q \\ b_p - a_q \end{pmatrix}\right)_{1 \leq p,q \leq l}$$

が成り立つ．一方，Cauchy-Binet の公式より，

$$\det(C^{b_1,\dots,b_l}_{a_1,\dots,a_l}) = \sum_{i_1<\cdots<i_l} \det(K^{i_1,\dots,i_l}_{a_1,\dots,a_l})\det(L^{i_1,\dots,i_l}_{b_1,\dots,b_l})$$

を得る．

Proposition 3.5. $a_1 < a_2 < \cdots < a_l$ 及び $b_1 < b_2 < \cdots < b_l$ とする．このとき，次の等式が成り立つ．

$$\sum_{i_1<\cdots<i_l} \det(K^{i_1,\dots,i_l}_{a_1,\dots,a_l})\det(L^{i_1,\dots,i_l}_{b_1,\dots,b_l}) = \delta_{a_1,b_1}\delta_{a_2,b_2}\cdots\delta_{a_l,b_l}.$$

Proof.

$$\det\left(\binom{p-q}{b_p-a_q}\right)_{1\le p,q\le l} = \delta_{a_1,b_1}\delta_{a_2,b_2}\cdots\delta_{a_l,b_l}$$

を示せば十分である．$M := \left(\binom{p-q}{b_p-a_q}\right)_{1\le p,q\le l}$ と置く．もし $a_1 > b_1$ ならば，全ての q に対して $a_q > b_1$ が成り立つ．この場合，M の第 1 行の成分はすべて 0 となるので，$\det(M) = 0$. もし $a_1 < b_1$ ならば，全ての p に対して $b_p - a_1 > p-1$ が成り立つ．この場合，M の第 1 列の成分はすべて 0 になるので，やはり $\det(M) = 0$. 従って，$\det(M) \neq 0$ となるには，$a_1 = b_1$ でなければならない．このとき，M の第 1 行は，$(1,1)$ 成分のみが 1 で，他はすべて 0 となる．まとめると $\det(M) = \delta_{a_1,b_1}\cdot\det\left(\binom{p-q}{b_p-a_q}\right)_{2\le p,q\le l}$. これを繰り返せば，望む結果が得られる． □

Proposition 3.5 より，

$$\sum_{\eta}\det(A^{\eta}_{\lambda})\det(B^{\eta}_{\mu}) = \delta_{\lambda,\mu} \tag{9}$$

が成り立つ．

Theorem 3.6. $\langle G_\lambda, g_\mu\rangle = \delta_{\lambda,\mu}$.

Proof. 等式 (9) より，

$$\begin{aligned}\langle G_\lambda, g_\mu\rangle &= \textstyle\sum_{\eta,\xi}\beta^{|\lambda|-|\eta|+|\xi|-|\mu|}\langle \det(B^{\eta}_{\lambda})s_\eta, \det(A^{\xi}_{\mu})s_\xi\rangle \\ &= \textstyle\sum_{\eta}\beta^{|\lambda|-|\mu|}\det(A^{\eta}_{\lambda})\det(B^{\eta}_{\mu}) = \delta_{\lambda,\mu}.\end{aligned}$$

□

Corollary 3.7. g_λ は双対 *Grothendieck* 多項式と等しい．

3.4. **Determinant formula for g_λ.** 双対 Grothendieck 多項式 g_λ の表示式 (5) を利用すれば，その行列式公式を得るのは容易である．

Proposition 3.8. 双対 *Grothendieck* 多項式 g_λ は，以下の *Jacobi-Trudi* 型公式を持つ．

$$g_\lambda = \det\left(\textstyle\sum_i \beta^i\binom{1-p}{i}h_{\lambda_p+q-p-i}(x)\right)_{1\le p,q\le l}.$$

Proof. $v_\lambda = v\begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix} \wedge v\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\lambda_2 \end{pmatrix} \wedge \cdots \wedge v\begin{pmatrix} l-1 \\ l-1-\lambda_l \end{pmatrix} \wedge v_l \wedge v_{l+1} \wedge \cdots$ と置く．式 (3) より，

$$e^F \cdot v\begin{pmatrix} \theta \\ a \end{pmatrix}$$
$$= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \beta^{i-a}\binom{-\theta}{i-a} \exp\left(\sum_{n\geq 1} p_n(x)\frac{a_n}{n}\right) v_i = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \beta^{i-a}\binom{-\theta}{i-a} \sum_{n\geq 0} h_n(x) v_{n+i}$$

が成り立つ．($F = \sum_{n\geq 1} p_n(x)\frac{a_n}{n}$ であった．) 特に，$e^F \cdot v\begin{pmatrix} p-1 \\ p-1-\lambda_p \end{pmatrix} = \sum_q B_p^q v_q$ と展開すると，その係数は $B_p^q = \sum_i \beta^i\binom{1-p}{i} h_{\lambda_p+q+1-p-i}(x)$ で与えられる．Proposition 2.1 (ii) を用いれば，

$$e^F \cdot v_\lambda = \det(B_{1,2,\ldots,l}^{0,1,\ldots,l-1}) V_0 + (\text{non-vacuum terms})$$

を得る．これは，等式

$$g_\lambda = \det(B_{1,2,\ldots,l}^{0,1,\ldots,l-1}) = \det(\textstyle\sum_i \beta^i\binom{1-p}{i} h_{\lambda_p+q-p-i}(x))_{1\leq p,q\leq l}$$

を導く (Proposition 2.1 (i) も見よ)． □

References

[1] A. S. Buch. A Littlewood-Richardson rule for the K-theory of Grassmannians. *Acta mathematica*, **189** (1), pp.37–78, 2002.

[2] T. Ikeda, S. Iwao, and T. Maeno. Peterson Isomorphism in K-theory and Relativistic Toda Lattice. *arXiv:math.AG/1703.08664*, Mar. 2017.

[3] T. Ikeda and H. Naruse. K-theoretic analogues of factorial Schur P-and Q-functions. *Advances in Mathematics*, **243**, pp.22–66, 2013.

[4] V. Kac and A. Raina. *Bombay Lectures On Highest Weight Representations Of Infinite Dimensional Lie Algebras*, Advanced Series in Mathematical Physics, vol.2. World Scientific, 1988.

[5] A. N. Kirillov. On some quadratic algebras I $\frac{1}{2}$: Combinatorics of Dunkl and Gaudin elements, Schubert, Grothendieck, Fuss–Catalan, universal Tutte and reduced polynomials. **12** (002), pp.172, 2016.

[6] T. Lam and P. Pylyavskyy. Combinatorial Hopf algebras and K-homology of Grassmanians. *International Mathematics Research Notices*, **2007**, pp.rnm125, 2007.

[7] T. Lam and M. Shimozono. Quantum cohomology of G/P and homology of affine Grassmannian. *Acta Mathematica*, **204** (1), pp.49–90, 2010.

[8] A. Lascoux. Anneau de Grothendieck de la variété de drapeaux. In *The Grothendieck Festschrift*, pp. 1–34. Springer, 1990.

[9] A. Lascoux and H. Naruse. Finite sum Cauchy identity for dual Grothendieck polynomials. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, **90** (7), pp.87–91, 2014.

[10] A. Lascoux and M.-P. Schützenberger. Symmetry and flag manifolds. In *Invariant theory*, pp. 118–144. Springer, 1983.

[11] C. Lenart. Combinatorial Aspects of the K-theory of Grassmannians. *Annals of Combinatorics*, **4** (1), pp.67–82, 2000.

[12] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford university press, 1998.

[13] T. Miwa, M. Jimbo, and E. Date. *Solitons: Differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras*, vol.135. Cambridge University Press, 2000.

[14] K. Motegi and K. Sakai. Vertex models, TASEP and Grothendieck polynomials. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **46** (35), pp.355201, 2013.

[15] K. Motegi and K. Sakai. K-theoretic boson–fermion correspondence and melting crystals. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **47** (44), pp.445202, 2014.

[16] M. Shimozono and M. Zabrocki. Stable Grothendieck polynomials and Ω-calculus (unpublished). 2011.

[17] D. Yeliussizov. Duality and deformations of stable Grothendieck polynomials. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **45** (1), pp.295–344, 2017.